Mécanique classique | Chapitre 7 | TD (M7)

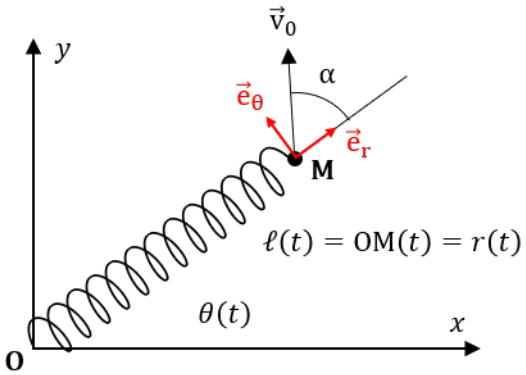
Données pour l'ensemble du TD :

Constante universelle de gravitation :	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1}
Constante de Planck réduite :	$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3,00 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1}
Charge élémentaire :	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
Masse de l'électron :	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Masse de la Terre :	$M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre :	$R_T = 6,38 \cdot 10^{3}$ km

Exercice n°1 • Mouvement 2D avec un ressort *cours*

On considère un point matériel de masse m, accroché à l'extrémité d'un ressort, libre de se déplacer sans frottement dans le plan horizontal (Oxy). On note $\ell(t)$ la longueur du ressort à un instant t, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur. On se place en coordonnées polaires.

On note r_0 la distance OM à l'instant initial, $\vec{v_0}$ sa vitesse initiale et α l'angle entre $\vec{e_r}$ et $\vec{v_0}$.



1) Justifier que la résultant des forces qui s'applique sur la masse est une force centrale conservative.

2) Établir l'expression de la constante des aires, d'une part en fonction de r et $\dot{\theta}$; d'autre part en fonction de r_0, v_0 et α.

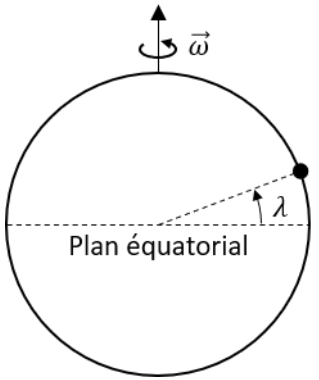
3) Établir l'expression de l'énergie mécanique dans l'état initial et dans un état quelconque.

4) Définir l'énergie potentielle effective et la représenter graphiquement pour 3 valeurs de α : $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ et $0 < \alpha < \pi/2$.

5) Discuter qualitativement de la nature des trajectoires. On admet que la trajectoire est une ellipse centrée sur l'origine du repère. Représenter cette ellipse.

Exercice n°2 • Mise en orbite ★☆☆

On lance un satellite de masse m d'une base terrestre située à la latitude λ (on rappelle que la latitude est nulle à l'équateur et vaut 90 ° aux pôles, cf. schéma).



1) Déterminer sa vitesse dans le référentiel géocentrique avant le lancement.

2) En déduire l'énergie à lui communiquer pour le placer sur une orbite de rayon R en fonction de données connues.

3) Justifier ainsi la localisation des centres de lancement proches de l'équateur.

Exercice n°3 • Deuxième vitesse cosmique ★☆☆

On étudie quelques conséquences des valeurs de la vitesse de libération d'un astre (aussi appelée deuxième vitesse cosmique), notée v_ℓ.

1) Rappeler l'expression de la deuxième vitesse cosmique pour un point matériel situé à la surface d'un astre de masse M_A et de rayon R_A.

2) Calculer sa valeur pour la Terre et pour Phobos (le satellite de Mars, de masse $M_P = 1,07 \cdot 10^{16}$ kg et de rayon $R_P = 11,2$ km) .

3) Un spationaute peut-il échapper, en courant ou en sautant, à l'attraction de la Terre et de Phobos ?

4) Dans un gaz de molécules de masse molaire M à la température T, la vitesse moyenne d'une molécule due aux chocs aléatoires entre molécules vaut

$$v = \sqrt{3RT/M}$$

Avec R la constante d'état des gaz parfaits. Calculer la vitesse v_{N_2} pour le diazote sur la Terre ($T = 300$ K) et sur Phobos ($T = 200$ K). Que peut-on en conclure quant à la

présence d'une atmosphère sur ces astres ?

5) On imagine que la masse de la Terre est concentrée dans une sphère de rayon $R_{sch} < R_T$. Calculer la valeur de R_{sch} (appelé rayon de Schwarzschild) pour laquelle la vitesse de libération est celle de la lumière. Si c'était le cas, la Terre serait alors un trou noir.

Exercice n°4 • Étude de l'atome d'hydrogène ★★☆

L'objectif est d'étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène. L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine sera noté $\overrightarrow{L}$.

1) Rappeler l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur l'électron.

2) En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$ de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.

3) Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

4) Déterminer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron et la mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

où $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et de L, la norme du moment cinétique de l'électron.

5) Donner l'allure de la représentation graphique de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et du moment cinétique L.

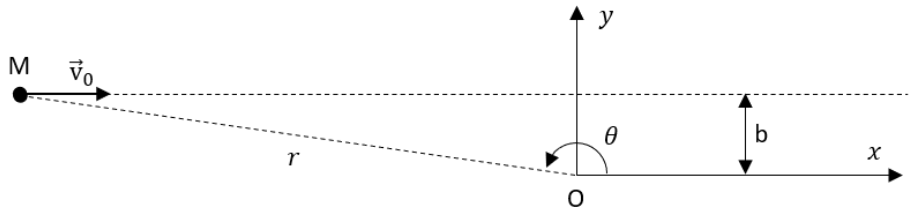
6) Déterminer le rayon r_0 de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,0}$ de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ε_0.

En physique quantique, dans le modèle de Bohr, l'électron ne peut se trouver que sur des orbites circulaires où le moment cinétique vaut $L = n\,\hbar$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

7) En déduire que les rayons r_n et les énergie mécaniques correspondantes $\mathcal{E}_{m,n}$ sont également quantifier. Déterminer les valeurs r_1 (en pm) et $\mathcal{E}_{m,1}$ (en eV) de l'état fondamental.

Exercice n°5 • Distance minimale d'approche d'un astéroïde ★★☆

Un astéroïde de masse $m = 1,0 \cdot 10^{18}$ kg s'approche dangereusement de la Terre. Il possède une vitesse $v_0 = 10$ km·s^{-1} dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen avec un paramètre d'impact $b = 8,0 \cdot 10^3$ km. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel M pour étudier son mouvement.



1) Exprimer la constante des aires C de deux façons, en fonction de r et $\dot{\theta}$ d'une part et en fonction de b et v_0 d'autre part. Quel est son signe ?

2) Déterminer l'énergie mécanique du système. En déduire la nature de la trajectoire de l'astéroïde et la tracer. Dans la suite, on pose :

$$d = \frac{GM_T}{v_0^2}$$

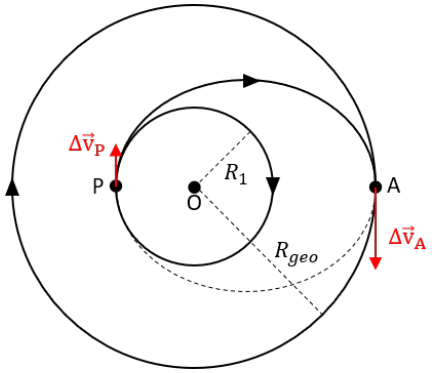
3) Quel est l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse au point P, le point de la trajectoire le plus proche de la Terre ? Justifier votre réponse.

4) Déterminer la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport au centre de la Terre.

5) Déterminer la condition sur le paramètre d'impact b pour savoir si l'astéroïde s'écrase ou non sur Terre.

Exercice n°6 • Transfert d'orbite ★★☆

La réserve de carburant des fusées est ajustée pour qu'elles puissent positionner des satellites en orbite circulaire basse. Pour aller sur une orbite de plus haute altitude, le satellite doit emporter une petite réserve de carburant afin de se placer sur l'orbite souhaitée.



On étudie un satellite de masse $m = 5,8$ tonnes initialement positionné en orbite circulaire basse, de rayon R_1 (correspondant à une altitude $h_1 = 600$ km). On souhaite placer le satellite sur l'orbite géostationnaire de rayon R_{geo}. Pour cela, un petit réacteur lui permet de modifier sa vitesse quasi-instantanément. Lorsqu'il se trouve au point P, le satellite augmente instantanément sa vitesse de la quantité Δv_P. Il se trouve alors sur une orbite elliptique dite de transfert, qui est tangente à l'orbite basse à son périgée et tangente à l'orbite géostationnaire à son apogée. Lorsqu'il se trouve au point A, le satellite augmente instantanément sa vitesse de la quantité Δv_A afin de se placer sur l'orbite géostationnaire.

1) Déterminer les valeurs de R_1 et de R_{geo}.

2) Déterminer la valeur de l'énergie mécanique sur chacune des trois orbites.

3) Déterminer le travail W qui a été fourni par le réacteur au point P et au point A.

4) Déterminer les vitesses en P et A, avant et après chaque mise à feu du réacteur.

5) Calculer la durée du transfert de P à A.

Exercice n°7 • Chute d'un satellite ★★½

La station spatiale internationale (ISS) de masse $m = 400$ tonnes décrit une orbite circulaire autour de la Terre.

1) La période de l'ISS est de $T_0 = 92,7$ min. Calculer le rayon r_0 de son orbite et la vitesse v_0 du satellite.

Les couches de l'atmosphère induisent une couche de frottement fluide, dirigée selon $\overrightarrow{f} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$ avec $\alpha \simeq 10^{-4}$ kg·s^{-1}.

2) Donner l'équation différentielle vérifiée par le moment cinétique de l'ISS $\overrightarrow{L_O}$ par rapport au centre de la Terre. On fera apparaître une constante de temps τ.

3) Résoudre cette équation différentielle. Montrer que le mouvement est plan.

4) Comparer τ et T_0. Justifier alors qualitativement qu'il soit possible de considérer que la trajectoire est un cercle dont le rayon varie lentement avec le temps.

5) Avec cette approximation, déterminer les expressions de r(t) et v(t). L'hypothèse d'un trajectoire quasi-circulaire est-elle vérifiée ?

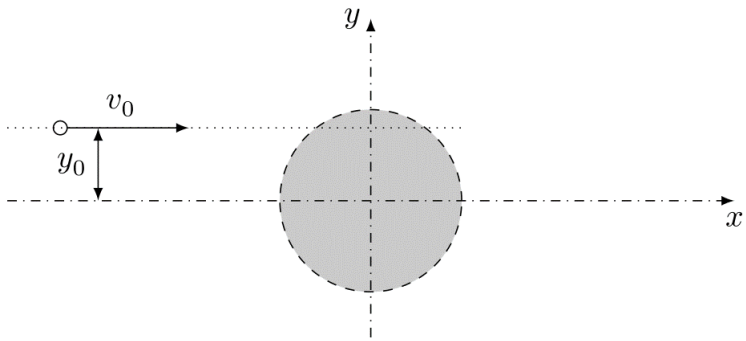
6) Comment varie l'énergie potentielle et l'énergie cinétique au cours du temps ?

Afin de ne pas s'écraser sur Terre, l'ISS possède des moteurs qui sont régulièrement mis à feu. On considère ici que ce moteurs fonctionnent en continue, de manière à maintenir l'ISS exactement sur l'orbite circulaire initiale.

7) Quelle puissance doivent fournir les moteurs ?

Exercice n°8 • Modèle d'interaction forte ★★★

Ce sujet discute d'un modèle d'interaction forte, une force attractive s'exerçant seulement à courte distance entre nucléons (protons et neutrons). On étudie en particulier l'interaction d'un neutron projectile de masse m dont la trajectoire rencontre celle d'un noyau fixe, sphérique de rayon r_0. La trajectoire initiale du neutron est rectiligne uniforme de vitesse v_0 et de paramètre d'impact y_0.



Données : $m = 1,0$ u, $U_0 = 10,0$ MeV, $r_0 = 1,0$ fm et $d = 0,1$ fm. Les données numériques ci-dessus utilisent pour unités de longueur, d'énergie et de masse respectivement le femtomètre ($1,0$ fm $= 10^{-15}$ m), le méga-électronvolt ($e = 1,6{\cdot}10^{-19}$ C) et l'unité de masse atomique (1 u $= 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg).

La force exercée par le noyau sur le neutron est centrale, attractive, d'expression (en coordonnées sphériques) :

$$\overrightarrow{F} = F(r)\,\overrightarrow{e}_r \quad \text{où :} \quad F(r) = -\frac{U_0}{d}\exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{d}\right)^2\right)$$

1) Tracer l'allure et interpréter les courbes donnant $F(r)$ et l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ associée.

2) Proposer les interprétations physiques des grandeurs U_0, r_0 et d.

On étudie ici, en mécanique classique, les propriétés générales du mouvement d'un neutron soumis à la force $\overrightarrow{F}$.

3) Montrer l'existence de deux constantes du mouvement. Peut-on former un état lié du neutron et du noyau ?

4) En remarquant que $r_0 \gg d$, montrer que la trajectoire est formée de la réunion de segments de droite. Tracer l'allure des trajectoires pour différents paramètres d'impact.

5) Établir l'expression de l'angle de déviation θ (angle entre les trajectoire initiale et finale) en fonction du paramètre y_0.

On considère, en physique quantique, un état stationnaire lié à symétrie sphérique du neutron dans le noyau. Il est décrit par la fonction d'onde :

$$\psi(r,t) = \frac{f(r)}{r} \cdot e^{-iEt/\hbar}$$

On donne l'équation de Schrödinger en symétrie sphérique :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \mathcal{E}_p(r) \cdot \psi(r,t) = i\,\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

6) Déterminer la forme de $f(r)$.

7) Montrer que l'énergie E du neutron est quantifiée.

Éléments de correction

❶ 2) $C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \sin(\alpha)$. 3) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) + \frac{1}{2}k\left(r-\ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\left(r_0-\ell_0\right)^2$. 4) $\mathcal{E}_{p,eff}\left(r\right) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}k\left(r-\ell_0\right)^2$. 5) Trajectoire bornée entre r_{min} et r_{max}. ❷ 1) $v_0 = \frac{2\pi}{T}R_T\ \cos cos\lambda$. 2) $\Delta\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_T}{2R_T} + \frac{GmM_T}{R} - \frac{1}{2}mv_0^2$. 3) $\lambda = 0$. ❸ 1) $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}}$. 2) v_ℓ (Terre) $= 11$ km·s^{-1} et v_ℓ (Phobos) $= 11$ m·s^{-1}. 3) Non. 4) v_{N_2} (Terre) $= 540$ m·s$^{-1} \ll v_\ell$ et v_{N_2} (Phobos) $= 420$ m·s$^{-1} \gg v_\ell$. 5) R_{sch} (Terre) $= 8,6$ mm. ❹ 1) $\overrightarrow{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r$. 2) $\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. 3) Force centrale. 4) $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. 5) Si $L \neq 0$: cercle, ellipse, parabole, hyperbole. Si $L = 0$: chute en ligne droite sur le proton. 6) $r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m_e e^2}$ et $\mathcal{E}_{m,0} = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\right)^2$. 7) $r_n = r_1 \times n^2$ avec : $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 53$ pm et $\mathcal{E}_{m,n} = \frac{\mathcal{E}_{m,1}}{n^2}$ avec : $\mathcal{E}_{m,1} = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 = -13,6$ eV. ❺ 1) $C = r^2\dot{\theta} = -bv_0 < 0$. 2) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$ donc hyperbole. 3) $\overrightarrow{v}_P \perp \overrightarrow{OP}$ car $dotr = 0$. 4) $r_P = -d + \sqrt{d^2+b^2}$. 5) $b > \sqrt{\left(R_T+d\right)^2 - d^2}$. ❻ 1) $R_1 = R_T + h_1 = 6,98 \cdot 10^6$ m et $R_{geo} = 42,2 \cdot 10^6$ m. 2) $\mathcal{E}_m(1) = -\frac{GmM_T}{2R_1} = -165 \cdot 10^9$ J, $\mathcal{E}_m(ellipse) = -\frac{GmM_T}{2a} = -47,0 \cdot 10^9$ J et $\mathcal{E}_m(geo) = -\frac{GmM_T}{2R_{geo}} = -27,4 \cdot 10^9$ J. 3) $W_P = \mathcal{E}_m(ellipse) - \mathcal{E}_m(1) = 118 \cdot 10^9$ J et $W_A = \mathcal{E}_m(geo) - \mathcal{E}_m(ellipse) = 19,6 \cdot 10^9$ J. 4) $v_1 = v(P^-) = \sqrt{\frac{GM_T}{R_1}} = 7,55 \cdot 10^3$ m·s^{-1}, $v(P^+) = \sqrt{\frac{2W_P}{m} - v_1^2} = 9,90 \cdot 10^3$ m·s^{-1}, $v_{geo} = v(A^+) = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{geo}}} = 3,07 \cdot 10^3$ m·s^{-1} et $v(A^-) = \sqrt{v_{geo}^2 - \frac{2W_A}{m}} = 1,64 \cdot 10^3$ m·s^{-1}. 5) $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}} = 1,92 \cdot 10^4$ s $= 5,32$ heures. ❼ 1) $r_0 = 6,78 \cdot 10^6$ m et $v_0 = 7,66 \cdot 10^3$ m·s^{-1}. 2) $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} + \frac{\overrightarrow{L_O}}{\tau} = \overrightarrow{0}$ avec : $\tau = \frac{m}{\alpha}$. 3) $\overrightarrow{L_O} = mr_0 v_0\, e^{-t/\tau}\overrightarrow{u}_z$. 4) $\tau \simeq 4 \cdot 10^9$ s $\gg T_0$. 5) $\overrightarrow{OM} = r_0\, e^{-2t/\tau}\overrightarrow{u}_r$ donc : $\Delta r = r_0\left(1 - e^{-2T_0/\tau}\right) \simeq 20$ m $\ll r_0$ et $\overrightarrow{v}(t) = v_0\, e^{t/\tau}\overrightarrow{u}_\theta$. 6) $\mathcal{E}_p$ diminue et $\mathcal{E}_c$ augmente. 7) $\mathcal{P}_m = \alpha v_0^2 = 6$ kW. ❽ Cf. correction.